

De opgave is: voor gegeven x en y uit het schema

1	x	$\frac{x^2}{2!}$	$\frac{x^3}{3!}$		
y	xy	$\frac{x^2 y}{2!}$	$\frac{x^3 y}{3!}$		
$\frac{y^2}{2!}$	$\frac{xy^2}{2!}$	$\frac{x^2 y^2}{2! 2!}$	$\frac{x^3 y^2}{3! 2!}$		S_2^*
$\frac{y^3}{3!}$	$\frac{xy^3}{3!}$	$\frac{x^2 y^3}{2! 3!}$	$\frac{x^3 y^3}{3! 3!}$		S_1^*
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
					S_0

de sommen S_0 en $\sum_{r=0}^{\infty} S_r$ en $\sum_{r=0}^{\infty} S_r^*$ te bepalen. Voor de berekening zal van de volgende formules en eigenschappen van Bessel-functies gebruik worden gemaakt:

(1) $I_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}z)^{n+2r}}{r!(n+2r)!}$ waaruit gemakkelijk volgt:

(2) $I_{n+1}(z) < \frac{z}{2(n+1)} I_n(z)$.

Verder van de recursieformule

(3) $I_{n+1}(z) = I_{n-1}(z) - \frac{2n}{z} I_n(z)$.

$I_0(z)$ en $I_1(z)$ zijn getabelleerd, $I_n(z)$ voor grotere z niet, of niet met voldoende nauwkeurigheid. $I_n(z)$ wordt, voorzover nodig, met behulp van (3) berekend. Nu is volgens (1):

(4) $S_0 = I_0(2\sqrt{xy})$; $S_n = \left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^n I_n(2\sqrt{xy})$

en $S_n^* = \left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^n I_n(2\sqrt{xy})$.

De S_0 kan dus na berekening van $2\sqrt{xy}$ worden opgezocht. Van de twee nog te berekenen sommen $\sum_{r=1}^{\infty} S_r$ en $\sum_{r=1}^{\infty} S_r^*$ berekenen we de

eerste als $y < x$ en de tweede als $y > x$ is. Wordt deze reeks na de m^e term afgebroken, dan volgt uit (2), dat

$$\sum_{m+1}^{\infty} S_y^{(*)} < S_m^{(*)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{y^1}{m+1}\right)^n = S_m^{(*)} \frac{y^1}{m+1-y^1} \quad \begin{matrix} 1 \text{ rep. } x \text{ (voor } x \text{ rondere} \\ \text{met } *). \end{matrix}$$

Hiermee kan men dus in na de berekening van iedere nieuwe term gemakkelijk zien of reeds een voldoende benadering is bereikt.

Daar verder de som $S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_y + \sum_{n=1}^{\infty} S_y^* = e^{x+y}$ is kan men de nog overgebleven deelsom gemakkelijk vinden. Indien x en y niet ongeveer gelijk zijn, zal men meestal met de berekening van slechts enkele I_n 's kunnen volstaan; het aantal is afhankelijk van de gewenste nauwkeurigheid.

$$\begin{array}{ll} \text{Voorbeelden: voor } x = 0,734 & \text{is } e^{x+y} = 9,924 \\ y = 1,561 & S_0 = 2,519 \\ & \sum_{n=1}^{\infty} S_y = 5,669 \\ & \sum_{n=1}^{\infty} S_y^* = 1,736 \end{array}$$

(bij de berekening moest I_n berekend worden t.e.m. $n = 6$ om een nauwkeurigheid van zwakke 4 cijfers te bereiken).

$$\begin{array}{ll} \text{Voor } x = 0,654 & \text{is } e^{x+y} = 32,04 \\ y = 2,813 & S_0 = 3,88 \\ & \sum_{n=1}^{\infty} S_y = 26,22 \\ & \sum_{n=1}^{\infty} S_y^* = 1,94 \end{array}$$

(bij de berekening moest I_n berekend worden t.e.m. $n = 6$ om een nauwkeurigheid van zwakke 4 cijfers te bereiken).¹⁾

De hier bereikte nauwkeurigheid komt overeen met die van de gegeven getallen x en y . Indien deze echter in meer dan drie decimalen gegeven zouden zijn, zou een grotere nauwkeurigheid met de hier gevolgde methode toch niet zonder meer te bereiken zijn, daar de recursieformule (3), tengevolge van afrondingsfouten, voor toenemende n steeds onbetrouwbaarder wordt.

¹⁾ Zwakke vier cijfers betekent, dat het vierde cijfer een eenheid fout kan zijn.